1 Beginselen kansrekening

Drs. J.M. Buhrman

Inhoudsopgave

1.1 Experimenten en uitkomstenruimtes

We onderscheiden twee soorten experimenten: deterministisch en stochastisch. De tweede soort heet ook wel toevalsexperiment, omdat het toeval mede bepaalt wat de uitkomst zal worden. Een uitkomst kan zijn:
- een antwoord van een proefpersoon;
- het aantal ogen dat bovenkomt bij een worp met een dobbelsteen;
- de hoeveelheid neerslag in de komende maand;
- de plaats waar een dartpijltje in het bord terecht komt.

Soms zijn uitkomsten 'elementair', wat inhoudt dat ze niet verder te splitsen zijn. Dat is bijv. het geval bij 'het aantal ogen' bij een worp met een dobbelsteen. Prettig is het dan als de verzameling van deze uitkomsten *symmetrisch* is, d.w.z. dat de éne uitkomst niet systematisch vaker of minder vaak zal optreden dan de andere uitkomst. Ook dat is bij een worp met de dobbelsteen het geval, tenminste: als die dobbelsteen zoals dat heet 'zuiver' is.

Een scheikundige die bij een bepaalde reactie het ontstaan van een bepaalde kleur wil demonstreren, voert een *deterministisch* experiment uit: de uitkomst daarvan is bekend en ligt vast. Deterministische experimenten zijn hier geen onderwerp van studie.

Uitkomsten kunnen meetresultaten (neerslag) zijn, dan wel uitkomst van een telling (dobbelsteen). Dat is het belangrijkste onderscheid tussen *continue* grootheden (in kg, seconden, meters) en *discrete* grootheden (vaak: 0, 1, 2, 3, ... of 1, 2, 3, ...).

In deze syllabus wordt met *uitkomstenruimte* de verzameling van *elementaire uitkomsten* bedoeld, zoals 1, 2, . . . , 6 bij de worp met een dobbelsteen. Een deelverzameling daarvan wordt als *gebeurtenis* (Eng: *event*) betiteld. Voorbeelden van gebeurtenissen bij een worp met een dobbelsteen zijn: 'aantal ogen is groter dan 3' en 'aantal ogen is even'. De bijbehorende deelverzamelingen elementaire uitkomsten zijn $\{4, 5, 6\}$ resp. $\{2, 4, 6\}$.
In de Engelstalige literatuur heeft de term '*sample space*' soms een iets andere betekenis dan hierboven gedefinieerd.

Opgaven

1.1 Uit een doos met ballen genummerd 0, 1, 2, . . . , 9 worden er twee getrokken. Beschrijf een uitkomstenruimte als (a) de eerste bal niet wordt teruggelegd alvorens de tweede wordt getrokken, (b) indien wel.

1.2 In een stroomcircuit zitten de schakelaar 1 en 2 in serie. Schakelaar 3 zit parallel aan dit tweetal. Elk van de schakelaars kan open of gesloten zijn. In de stand 'gesloten' kan er stroom vloeien. Geef een uitkomstenruimte die alle mogelijk posities van het drietal schakelaars weergeeft. In welke kan stroom vloeien?

1.3 A en N spelen ‘best-of-seven’, waarbij een speler wint als hij ten minste vier games heeft gewonnen. Geef alle uitkomsten waarin A in een partij van ten hoogste zes games wint.

1.4 Uit een zak met fiches genummerd 1, 2, 3, . . . , 12 trekken we er twee zonder teruglegging. Geef een uitkomstenruimte.

1.5 Trek uit de verzameling {2, 3, . . . , 7} twee getallen zonder teruglegging waarbij het tweede getal kleiner moet zijn dan het eerste, wat inhoudt, dat zonodig opnieuw een tweetal worden getrokken totdat dit het geval is. Geef de uitkomstenruimte.

1.6 Gooi vijfmaal achtereen met een munt, en houd cumulatief de aantallen ‘kop’ en ‘staart’ bij. Welke uitkomsten hebben de eigenschap dat het reeds gegooide aantal malen ‘kop’ steeds (d.w.z. na elk van de vijf worpen) groter is dan het aantal malen ‘staart’. [Men zegt: ‘kop of staart’, dan wel ‘kruis of munt’.]

Kansdefinitie (volgens Laplace)

De *kans op een gebeurtenis* is het aantal ‘gunstige uitkomsten’ gedeeld door het totale aantal mogelijke uitkomsten, mits deze ‘gelijkelijk mogelijk’ zijn. We geven het totale aantal elementaire uitkomsten met N(S) aan, en het aantal daarvan dat aan gebeurtenis A (de ‘gunstige’) gekoppeld is, met N(A). Dan is de kans P(A) op gebeurtenis A te schrijven als breuk:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{N}(A)}{\mathrm{N}(S)}$$

De term ‘gelijkelijk mogelijk’ slaat op de symmetrie (= het ontbreken van welke voorkeur ook) onder de elementaire uitkomsten in de uitkomstenverzameling. Geen van de elementaire uitkomsten heeft een voorsprong op een van de andere. Onder ‘gunstige uitkomsten’ moet worden verstaan: díe uitkomsten die tot het optreden van de desbetreffende gebeurtenis leiden. Bij een worp met een dobbelsteen heeft de gebeurtenis ‘even’ als ‘gunstige uitkomsten’ de uitkomsten 2, 4, 6. Is de dobbelsteen zuiver, dan levert de definitie van Laplace dus 3/6 als de ‘kans op even’.

Bij het trekken van elementen uit een populatie van personen of objecten gaat het er vaak om of men een persoon of object mèt of zònder een bepaald kenmerk trekt. Daarom wordt in plaats van het woord *gebeurtenis* ook wel het woord *kenmerk* gebruikt. Men spreekt dan over de *kans op een kenmerk*.

Een *zuivere munt* wordt gedefinieerd als een munt waarbij - na het opwerpen ervan - geen van beide zijden systematisch vaker bovenkomt dan de andere. Bij een worp met een zuivere munt bestaat de uitkomstenruimte uit twee uitkomsten. Toepassing van bovenstaande definitie leidt er toe, dat men dan mag zeggen dat de kans op ‘kruis’ evenals de kans op ‘munt’ gelijk is aan ½.

Opgaven

1.8 Werp vijfmaal met een zuivere munt. Bereken de kans op
- a precies driemaal kop.
- b ten minste driemaal kop.

1.9 Werp driemaal met een zuivere dobbelsteen. Bereken de kans op
- a precies driemaal een even uitkomst.
- b tweemaal een zes en eenmaal iets anders.
- c bij elkaar ten minste zeventien ogen.

Kans als relatieve frequentie

Als men meent de *kans op een gebeurtenis* te weten, kan men deze waarde controleren door het experiment een groot aantal malen uit te voeren en vast te stellen in welk deel (welke fractie) van de experimenten die gebeurtenis is opgetreden. Het aantal malen dat de gebeurtenis is opgetreden gedeeld door het aantal malen dat het experiment is uitgevoerd heet de *relatieve frequentie* (vergelijk met definitie van Laplace). Deze wordt ook wel de *fractie successen* genoemd.

Stel, een experiment waarbij gebeurtenis A kan optreden, wordt n maal uitgevoerd. Als we het aantal malen dat A daarbij optreedt, aangeven met $n(A)$ dan zouden we ook kunnen *definiëren*:

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n} \qquad \text{(\textit{relatieve-frequentie-definitie})}$$

Deze definitie geeft de mogelijkheid een veronderstelde waarde van een kans (bv. $^1/_6$ als vermoedelijke kans op een zes bij een dobbelsteen) op juistheid te onderzoeken. Herhaal het experiment heel vaak (gooi telkens met die dobbelsteen) tot de relatieve frequentie bijna niet meer verandert. Dan zijn er twee mogelijkheden:

- De waarde waaromheen de relatieve frequentie nog schommelt, verschilt duidelijk van $^1/_6$.
- De relatieve frequentie schommelt in de buurt van $^1/_6$.

In het eerste geval lijkt vastgesteld dat de kans op een zes niet $^1/_6$ is. In het tweede geval zou de kans op een zes wel $^1/_6$ kunnen zijn, maar - zo moet worden benadrukt - het is daarmee nog niet bewezen.

Opdracht 1.10
Gooi 30 maal met een dobbelsteen, tel de aantallen énen, tweeën, enz., en vergelijk de relatieve frequenties met 1/6. Vergelijk eigen uitkomsten met die van medestudenten.
Doe een vergelijkbare simulatie op de computer, bv. in EXCEL met de functie: `= INT(RAND()*6) + 1`
RAND() is een willekeurig ‘reëel’ getal uit het interval [0 ; 1); INT rondt naar beneden af.

Stelling 1.1
De relatieve frequentie van gebeurtenis A nadert tot de kans P(A) als het aantal experimenten waarmee de relatieve frequentie wordt bepaald, naar ∞ nadert.

Dit is een voortvloeisel uit de *zwakke wet van de grote aantallen* (Weak Law of Large Numbers).
Twijfelt men aan de juistheid van een berekende kans, dan kan men trachten deze waarde te falsifiëren met de uitkomsten van experimenten. Bewijzen dat een kans juist is, kan men echter nooit.

Vraag 1.11
Men geeft u een dobbelsteen. Kunt u nagaan of deze dobbelsteen zuiver is, zo ja, hoe, zo nee, waarom niet?

1.2 Gebeurtenissen als verzamelingen

Omdat een gebeurtenis kan worden opgevat als een deelverzameling uit de uitkomstenruimte, kunnen voor verschillende gebeurtenissen net als voor verschillende deelverzamelingen complement, doorsnede en vereniging worden gedefinieerd.
De notaties zijn dan ook:

- $A \cap B$ voor doorsnede;
- $A \cup B$ voor vereniging;
- $\overline{A}$ of A' voor het complement van A.

Definitie 1.1
Twee gebeurtenissen A en B (let op: bij één en hetzelfde experiment) heten *disjunct* (*mutually exclusive* of *disjoint*) als ze elkaar uitsluiten. De corresponderende verzamelingen van mogelijke uitkomsten hebben dan een lege doorsnede (notatie: $A \cap B = \varnothing$).

Opgaven

1.21 Men werpt met twee dobbelstenen.
- a Welke van de volgende gebeurtenissen zijn disjunct?
  - A het totale aantal ogen is even
  - B het totale aantal ogen is oneven
  - C(i) het totale aantal ogen is ten minste i (i = 9, 10, 11, 12)
  - D het totale aantal ogen is een kwadraat
  - E het aantal ogen van de ene dobbelsteen is gelijk aan het aantal ogen van de andere dobbelsteen.
- b Welke van de bovengenoemde gebeurtenissen is een deelverzameling van een andere bovengenoemde gebeurtenis?
- c Bereken de kans op elk van de genoemde gebeurtenissen als de dobbelstenen zuiver zijn. (Er is dan een symmetrische uitkomstenruimte met 36 uitkomsten.)
- d Als men de twee aantallen ogen naast elkaar schrijft, bepaal dan de kans dat het tweecijferige getal een kwadraat is.

1.22 Van een bepaald type auto kunnen stuur en/of remmen defect zijn (andere mogelijke defecten laten we hier buiten beschouwing). Van alle auto's van dit type is 87% in orde, heeft 3% alléén een defect stuur, heeft 6% alleen defecte remmen. Welk deel heeft beide defecten?

Definitie 1.2
Een *categorisch systeem* is een verzameling disjuncte gebeurtenissen waarvan de vereniging de hele uitkomstenruimte is.

Voorbeelden 1.1
De verzameling van elementaire uitkomsten vormt een categorisch systeem, want ook elementaire uitkomsten zijn gebeurtenissen. Als we elementaire gebeurtenissen samen nemen, bijv. 'even' en 'oneven' bij een worp met een dobbelsteen, krijgen we ook een categorisch systeem. Of, als we met drie dobbelstenen gooien zouden we de som van de ogen kunnen berekenen, en daarmee het volgende categorische systemen van drie gebeurtenissen vormen: {ten hoogste zes, van zeven tot en met twaalf, van 13 t/m 18}.

Een categorisch systeem verdeelt een verzameling in **categorieën**: elk element behoort tot precies één categorie.

1.3 Kansregels

Er zijn verschillende manieren om kansen 'in te voeren'. We zouden ook kunnen spreken van zienswijzen die aan het kansbegrip ten grondslag liggen. Naast de definitie van Laplace is er de *relatieve-frequentie-opvatting* (stelling 1.1). We zagen al dat de kans op een gebeurtenis kan worden opgevat als de limiet (voor $n \to \infty$) van de relatieve frequentie van het optreden van die gebeurtenis bij n herhalingen van het experiment waarbij die gebeurtenis kan optreden (blz. 3/4).

Een andere benadering is de axiomatische aanpak. Men poneert dan enkele stellingen, die men intuïtief uit de relatieve-frequentie-definitie zou kunnen afleiden, als axioma's. Dat verlost ons van de noodzaak ze te bewijzen. Omgekeerd moet men dan aannemelijk maken, dat kansen volgens dat axioma-stelsel in de praktijk toepasbaar zijn. We gaan niet op deze achtergrond in, maar geven de kansregels om ze te kunnen toepassen. Eén van die axioma's luidt: $\mathrm{P(A)} \geq 0$. Volgens de definitie van Laplace zou dit zonneklaar zijn.

Helaas zijn niet alle situaties met de definitie van Laplace te beschrijven. Zodra het aantal mogelijke uitkomsten niet meer eindig is, hebben we iets anders nodig. Dat is één van de redenen geweest om andere benaderingen te bedenken.

Stelling 1.2
Als A een gebeurtenis is, en A' (of $\overline{A}$) het complement daarvan, dan

$$\mathrm{P}(A') = 1 - \mathrm{P}(A) \quad \text{of} \quad \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A) \qquad (\textit{complement-regel})$$

Bewijs (met de definitie van Laplace)
We nemen aan dat de uitkomstenruimte N gelijkwaardige uitkomsten heeft. Er zijn daarin $\mathrm{N}(A)$ uitkomsten die met gebeurtenis A corresponderen.
Als A' en A elkaars complement zijn, geldt $\mathrm{N}(A') + \mathrm{N}(A) = N$. Na deling door N volgt de stelling. ♦

Stelling 1.3
Als A en B disjuncte gebeurtenissen zijn, geldt

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) \qquad (\textit{speciale optelregel})$$

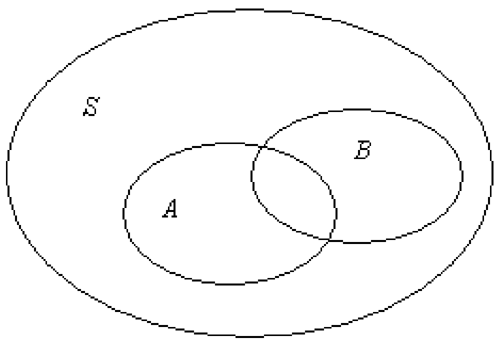
Bewijs (met de definitie van Laplace)
Bedenk $\mathrm{N}(A) + \mathrm{N}(B) = N(A \cup B)$. Na deling door N volgt de stelling. ♦

Stelling 1.4
Als A en B willekeurige gebeurtenissen zijn, geldt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (\textit{algemene optelregel})$$

Bewijs (met de definitie van Laplace)
Bedenk $A \cup B$ bevat alle elementen éénmaal. Met $N(A) + N(B)$ worden de elementen in de doorsnede tweemaal geteld, éénmaal in A en éénmaal in B. Dat is éénmaal teveel. Dus het aantal $N(A \cap B)$ moet éénmaal worden afgetrokken. Na deling door N volgt de stelling. ♦

Nuttig hulpmiddel bij het nadenken over gebeurtenissen en kansen daarop, zijn *Venn-diagrammen*.



S is de verzameling van alle mogelijke uitkomsten (de uitkomstenruimte).

A en B zijn deelverzamelingen van S.

Opgaven

1.31 Als A en B gebeurtenissen zijn, leg dan uit waarom: $P(A \cap \overline{B}) \geq P(A) - P(B)$

1.32 Water kan verontreinigd zijn met A of met B, of met beide. Van de watermonsters is 20% zuiver, heeft 40% verontreiniging A en 50% verontreiniging B. Bereken de kans dat een monster precies één van de twee verontreinigingen bevat.

1.33 Toon aan dat: $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

1.34 Met A òf B wordt bedoeld: A of B, maar niet beide. Geef een uitdrukking voor $P(A$ òf $B)$.

1.35 Bepaal een uitdrukking voor $P(A \cup B \cup C)$ door stelling 1.4 tweemaal toe te passen, eerst voor de twee verzamelingen A en $B \cup C$, dan opnieuw op de overblijvende verenigingen.

1.4 Voorwaardelijke kansen, onafhankelijkheid, nog meer kansregels

We zijn gewend sommige kansen te bepalen via een vermenigvuldiging. Het lijkt voor de hand te liggen om de kans op dubbel zes bij een worp met twee dobbelstenen te bepalen als het product van de kans op een zes bij de éne en de kans op een zes bij de andere dobbelsteen. Daarbij wordt impliciet geleund op het feit dat de uitkomsten van de twee dobbelstenen niet van elkaar afhangen. Om dit alles te kunnen preciseren moet eerst het begrip *voorwaardelijke kans* worden ingevoerd. Hiervoor gaan we ook weer uit van een eindige verzameling van mogelijke uitkomsten.

Een *voorwaarde* is zelf ook een gebeurtenis. Stel dat we over een gebeurtenis V beschikken. Deze splitst de verzameling mogelijke uitkomsten in twee disjuncte delen, namelijk V zelf en het complement V'. Het deel dat met V correspondeert, krijgt bij het berekenen van voorwaardelijke kansen de rol van de 'hele verzameling' van mogelijke uitkomsten. Kansen worden berekend door alle tellingen die nodig zijn om de definitie van Laplace te kunnen toepassen, te beperken tot dit deel. De voorwaardelijke kans op gebeurtenis A, gegeven voorwaarde V, wordt als volgt genoteerd en berekend:

$$P(A \mid V) = \frac{N(A \cap V)}{N(V)} \qquad (\textit{berekening voorwaardelijke kans})$$

In de teller staat het aantal elementen dat tot gebeurtenis *A* behoort, maar dan alleen als ze zich in *V* bevinden. In de noemer staat het aantal elementen van de - tot *V* beperkte - uitkomstenruimte. Deelt men teller en noemer van rechterlid door *N* (dat is het aantal elementen van de hele uitkomstenruimte), dan ontstaat de formule die gewoonlijk wordt gebruikt als definitie van voorwaardelijke kans:

Definitie 1.3

$$P(A|V) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} \qquad \textit{(definitie voorwaardelijke kans)}$$

Voorbeeld 1.2
Een gewoon kaartspel bestaat uit 52 kaarten verdeeld over vier ‘kleuren’. Van elke kleur zijn er vier ‘plaatjes’ (aas, heer, vrouw, boer). De kans om een aas te trekken is dus 4/52. Stel nu dat iemand van een zekere afstand kan zien dat de getrokken kaart een plaatje is, maar niet welk. De voorwaardelijke kans (gegeven de gebeurtenis ‘er is een plaatje getrokken’) dat dàn de getrokken kaart een aas is, is 4/16 = ¼. Er zijn immers 16 plaatjes in het spel.

Stel dat we niet kunnen zien dat het om een plaatje gaat, maar wel dat de getrokken kaart zwart is, of misschien zelfs dat het een schoppen is. Met deze informatie is de kans op een aas dezelfde als wanneer we niets wisten. Dit zullen we hieronder leren kennen als kenmerkend voor *onafhankelijkheid*.

Stelling 1.5
Als *A* en *B* willekeurige gebeurtenissen zijn, geldt

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A) \qquad \textit{(algemene productregel)}$$

Deze stelling volgt direct uit definitie 1.3 van voorwaardelijke kans.

Definitie 1.4
Twee gebeurtenissen A en B heten *onafhankelijk* (*independent*) als

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \qquad \textit{(speciale productregel)}$$

Deze regel is dus een bijzonder geval van de productregel uit stelling 1.5 voor het geval de gebeurtenissen onafhankelijk zijn. Combineren we de definities 1.3 en 1.4 dan krijgen we:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A) \qquad \text{als } A \text{ en } B \textbf{ onafhankelijk}$$

De toevoeging ‘bij één en hetzelfde experiment’ in de definitie van onafhankelijkheid behoeft nog enige toelichting. Hoe zit het nu als we niet één keer met twee dobbelstenen gooien, maar twee keer met dezelfde? We maken dan uit die twee worpen toch één experiment door ons de uitkomstenruimte voor te stellen als een *Cartesisch product* (vierkant van 6 bij 6, dus 36 mogelijkheden). In de praktijk gaat het meestal zonder veel omhaal. Als twee experimenten geheel los van elkaar staan, neemt men aan dat alle gebeurtenissen die (exclusief) bij het éne experiment gedefinieerd zouden kunnen worden, onafhankelijk zijn van alle gebeurtenissen die (uitsluitend) aan het tweede experiment gekoppeld kunnen worden. Men laat dan de aanmaak van het Cartesisch product achterwege.

Opgaven

1.41 Club AX wint met kans 0,7 zijn wedstrijden, onafhankelijk van tegenstander en vorige resultaten. Bereken de kans dat AX de komende drie wedstrijden vaker wint dan verliest of gelijkspeelt.

1.42 Van de gebeurtenissen A, B en C is gegeven: A en B zijn onafhankelijk; A en C zijn onafhankelijk, B en C zijn disjunct (mutually exclusive, d.w.z. ze sluiten elkaar uit); van de kansen is gegeven: $P(B) = 0{,}5$ $P(C) = 0{,}3$ $P(A \cup B \cup C) = 0{,}9$
Bereken P(A).

1.43 Studente Caroline gaat op voor haar rijbewijs tot zij geslaagd is. Neem aan dat alle pogingen, onafhankelijk van elkaar, een slaagkans van 4/7 hebben. Bereken de kans dat Caroline een even aantal pogingen nodig heeft om het rijbewijs te halen.

1.44 De gebeurtenissen A en B hebben beide kans ½. Verder is bekend: $P(A \cup B) = {}^2/_3$.
- a Sluiten A en B elkaar uit?
- b Zijn A en B onafhankelijk?
- c Bereken $P(\overline{A} \cap B)$.
- d Bereken $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.
- e Merk de relatie op tussen $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ en $P(A \cup B)$.

1.45 Van de gebeurtenissen A, B en C is gegeven: A en B zijn disjunct; A en C zijn onafhankelijk; B en C zijn onafhankelijk; P(A) = 0,3; P(B) = 0,2; P(C) = 0,4. Bereken de kans dat van de gebeurtenissen A, B en C er precies één optreedt.

1.46 Toon aan dat de onafhankelijkheid van A en B impliceert dat ook het complement van A onafhankelijk is van B. [Daaruit volgt dan dat ook de complementen van A en B onafhankelijk zijn, ja toch?]

Toon verder aan: A en B zijn onafhankelijk $\Leftrightarrow$ $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$

1.47 Vaas I bevat vier groene en vijf rode knikkers, vaas II zes groene en acht rode. Men trekt één knikker uit I en stopt hem in II; daarna wordt één knikker uit II getrokken.
- a Bereken de kans dat de tweede knikker groen is.
- b Bereken, gegeven dat de tweede getrokken knikker groen is, de voorwaardelijke kans dat de eerste rood was.

1.5 Kruistabellen, stelling van Bayes

Een kruistabel is een indeling volgens twee categorische systemen. Als de éne indeling k categorieën telt, en de andere r, zijn er $k \times r$ combinaties van categorieën te maken.

De k categorieën kunnen bijvoorbeeld corresponderen met k (disjuncte) gebeurtenissen van experiment I, en de r categorieën corresponderen met gebeurtenissen van experiment II. In een tabel met k kolommen en r regels, waarin dus $k \times r$ cellen te onderscheiden zijn, wordt elke cel gevuld met de kans op die combinatie van gebeurtenissen, waarvan de ene bij experiment I behoort, de andere bij experiment II. Die twee experimenten hoeven niet onafhankelijk te zijn.

Het kan ook zijn dat er sprake is van slechts één experiment, waarbij men twee categorische systemen onderscheidt. We geven hiervan een voorbeeld.

Voorbeeld 1.3
Aan een universiteit worden drie studierichtingen {E, F, G} onderscheiden. Studenten {jongens, meisjes} worden ingeschreven bij precies één van die studierichtingen. De hele studentenpopulatie is als volgt in te delen.

	E	F	G	
Jongens	1050	900	1200	3150
Meisjes	900	450	1500	2850
Totaal	1950	1350	2700	6000

Wil men van kansen kunnen spreken, dan moet er een experiment worden uitgevoerd. Als experiment kan men nemen 'éénmaal aselect trekken uit deze populatie'. In dat geval zouden de kansen gelijk zijn aan (alle aantallen worden gedeeld door 6000):

	E	F	G	
Jongen	0.175	0.150	0.200	0.525
Meisje	0.150	0.075	0.250	0.475
Totaal	0.325	0.225	0.450	1.000

Enkele voorwaardelijke kansen zijn:

P(Jongen | E) = 0,175 / 0,325 = 7/13 = 0,538 (van de E-studenten is 7/13-de deel jongen)
P(E | Jongen) = 0,175 / 0,525 = 1/3 = 0,333 (van de jongens studeert 1/3-de deel E)

Verdeling van de geslachten over de studierichtingen leest men af uit de volgende tabel:

	E	F	G	
Jongen	0.538	0.667	0.444	0.525
Meisje	0.462	0.333	0.556	0.475
Totaal	1.000	1.000	1.000	1.000

Aan het feit dat in deze tabel de kolommen E, F en G ànders zijn de rechter kolom (voor het totaal van alle studierichtingen), ziet men dat de gebeurtenissen E, F, G *niet onafhankelijk* (dus *afhankelijk*) zijn van de gebeurtenissen 'jongen' en 'meisje'. In verhouding studeren meer jongens F en meer meisjes G. Kolom E lijkt het meeste op de rechter kolom, maar precies gelijk zijn ze niet, dus ook E en geslacht zijn afhankelijk.

In de laatste tabel is de rechterkolom niet zonder meer uit de kolommen E, F en G af te leiden. Dat kan alleen als men de beschikking heeft over de aandelen E, F en G in de studentenpopulatie. In de middelste tabel staan deze aandelen in de onderste regel (0,325; 0,225; 0,450). Met deze informatie en de verhoudingen van de kolommen van de laatste tabel zou de middelste tabel weer kunnen worden terugberekend. Deze eigenschap is terug te vinden in de volgende stelling.

De volgende twee stellingen gaan over een gebeurtenis A en een categorisch systeem. Daarbij zou men de volgende kruistabel kunnen maken.

	E_1	E_2		E_k	Totaal
A	$P(A \cap E_1)$	$P(A \cap E_2)$		$P(A \cap E_k)$	$P(A)$
niet A (= A')	$P(A' \cap E_1)$	$P(A' \cap E_2)$		$P(A' \cap E_k)$	$P(A')$
Totaal	$P(E_1)$	$P(E_2)$		$P(E_k)$	1

Stelling 1.6

Als A een willekeurige gebeurtenis is, en $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ is een categorisch systeem, geldt

$$P(A) = P(A \mid E_1) \times P(E_1) + P(A \mid E_2) \times P(E_2) + \ldots + P(A \mid E_k) \times P(E_k)$$

Stelling 1.7

Als A een willekeurige gebeurtenis is, en $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ is een categorisch systeem, geldt

$$P(E_1 \mid A) = \frac{P(A \mid E_1) \times P(E_1)}{P(A \mid E_1) \times P(E_1) + P(A \mid E_2) \times P(E_2) + \ldots + P(A \mid E_k) \times P(E_k)} \qquad (\textit{Bayes})$$

Bewijs

Natuurlijk geldt:

$$P(E_1 \mid A) = \frac{P(A \cap E_1)}{P(A)} = \frac{P(A \mid E_1) \times P(E_1)}{P(A)}$$

Als men in deze laatste uitdrukking de noemer volgens stelling 1.6 vervangt, ontstaat de gezochte uitdrukking. ♦

Stelling 1.7 staat ook bekend als de omkeerregel van Bayes vanwege het feit dat in het linkerlid A de rol van voorwaarde speelt, terwijl in het rechterlid E_i's de voorwaarden zijn.

Opgaven

1.51 De firma's A, B en C leveren 15, 25 resp. 60% van alle memorysticks. De percentages ondeugdelijke sticks zijn voor de drie firma's 5, 7, 4 (%).
- a Bereken welk percentage van de sticks defect is.
- b Bereken, gegeven dat een willekeurig getrokken stick defect is, de voorwaardelijke kans dat deze van B afkomstig is.

1.52 Men heeft 64 zuivere munten en één met 'kop' op beide kanten. Uit de zak met deze 65 munten pakt men er willekeurig één. Zonder deze te bekijken wordt hiermee zesmaal geworpen. Men krijgt zesmaal kop. Bereken de kans dat met de afwijkende munt werd geworpen.

1.53 De faalkansen bij toepassen van methoden A, B resp. C in een proces zijn 30, 20 resp. 10%. Methode A wordt tweemaal zoveel toegepast als methode B, en viermaal zoveel als methode C.
- a Bereken de globale faalkans.
- b Als in een bepaalde situatie falen optreedt, bereken dan de kans dat dit gebeurde bij het gebruik van methode B.

1.54 Een boodschap wordt verzonden als een rij nullen en enen. De kans dat op een bepaald moment een 0 wordt verstuurd, is 0,4; anders wordt dus een 1 verstuurd. Een verzonden 1 wordt met kans 0,2 als 0 ontvangen, een verzonden 0 wordt met kans 0,1 abusievelijk in een 1 omgezet.
- a Bereken de kans dat er een 0 wordt ontvangen.
- b Als een 1 is ontvangen, bereken dan de kans dat een 0 werd verstuurd.

Moeilijker opgaven kansrekening

1.55 Een munt wordt geworpen tot de eerste keer kruis bovenkomt, òf tot de zesde keer munt bovenkomt.
- a Als de munt zuiver is (d.w.z. beide kanten hebben kans ½), bereken dan de kans dat het aantal malen dat wordt gegooid, een even aantal wordt.
- b Zelfde vraag, maar nu als de kans op kruis p bedraagt.

1.56 Laten we voor de eenvoud even aannemen, dat de kans dat een aselect getrokken persoon in een bepaalde maand jarig is, voor elke maand gelijk is aan 1/12. Bereken dan de kans P_r dat er van r aselect getrokken mensen ten minste twee in dezelfde maand jarig zijn, en wel voor $r = 2, 3, \ldots, 12$.

1.57 Met het volgende model wordt soms de verspreiding van een besmettelijke ziekte gesimuleerd. Begin met een pot met b zwarte en r rode ballen. Trek hieruit willekeurig een bal. Leg deze terug tezamen met c exemplaren van dezelfde kleur. Daarna wordt de procedure telkens herhaald.
- a Bereken de kans dat de eerste drie getrokken ballen rood zijn.
- b Toon aan dat de kans op een zwarte bal in de eerste trekking gelijk is aan die in de tweede trekking.
- c Toon aan dat de kans dat de k-de getrokken bal zwart is, gelijk is aan de kans dat de eerste getrokken bal zwart is.

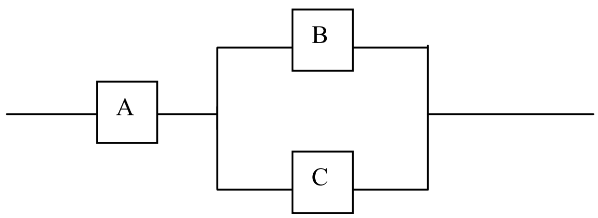
1.58 In een doos met 25 oude gloeilampen zijn er, door ruw omgaan met de doos, vijf exemplaren defect geraakt. Men trekt achtereenvolgens lampen uit deze doos. Bereken de kans dat de derde en de vierde defecte getrokken lamp worden gevonden in de vijfde resp. zesde trekking als
- a elke getrokken lamp na controle wordt teruggelegd.
- b de lampen achtereenvolgens terzijde worden gelegd.

1.6 Betrouwbaarheid van systemen

Belangrijke toepassingen van de kansregels worden gevonden in risico-analyse en bij het berekenen van de betrouwbaarheid van systemen die zijn opgebouwd uit componenten die elk een kans hebben om defect te raken.

Wij onderscheiden hier in een systeem parallelle en in serie geschakelde componenten. Parallelle componenten kunnen elkaars werking overnemen. Bij in serie geschakelde componenten is de werking van het hele systeem ontregeld als één van die componenten defect raakt. Van alle componenten zal worden aangenomen dat het falen ervan onafhankelijk is van het al of niet defect raken van andere componenten. Een voorbeeld zal de meeste van deze ideeën verduidelijken.

<u>*Voorbeeld* 1.4</u>
We stellen ons van een systeem van drie componenten de volgende opbouw voor:



Men moet zich voorstellen dat de werking van het systeem bepaald wordt door een gang van links naar rechts door de figuur. Is doorgang door A mogelijk en door òf B òf C òf door B en C beide, dan kan men aan de rechterkant komen. De componenten B en C heten *parallel geschakelde* componenten, omdat het defect raken van B òf C (één van de twee) de doorgang niet onmogelijk maakt. De groep B en C is *in serie geschakeld* met component A. Is A defect, dan is geen doorgang mogelijk. We zeggen: dan werkt het systeem niet. Zijn B en C beide defect, dan is - ongeacht de toestand van A - ook geen doorgang mogelijk: het systeem werkt ook dan niet.
Parallel betekent dus ‘naast elkaar’, **in serie** betekent ‘achter elkaar’.

Elk onderdeel heeft een bepaalde kans dat het werkt. Deze heet de *betrouwbaarheid* van dat onderdeel. Die betrouwbaarheden zouden per onderdeel kunnen verschillen. Zo heeft ook elk onderdeel in een systeem een kans dat het faalt. Die is gelijk aan 1 − betrouwbaarheid. Kan nu met zulk soort gegevens de betrouwbaarheid van het systeem worden berekend? Dat is dan de kans dat het systeem niet faalt. We gaan verder met het voorbeeld.

<u>*Voorbeeld* 1.4 *(vervolg)*</u>
We veronderstellen dat de kans dat A faalt 0,017 is, en dat deze kansen voor B en C gelijk zijn aan 0,2 resp. 0,15. En zoals al eerder gezegd: A, B en C falen onafhankelijk van elkaar. Systemen met voorwaardelijke kansen blijven buiten beschouwing.

De kans dat het groepje B-C werkt, wordt berekend met de complementregel en de speciale productregel. De kans dat het groepje niet werkt, is gelijk aan de kans dat B en C beide niet werken, en die is $0,2 \times 0,15 = 0,03$. De kans dat het groepje B-C wèl werkt, is dus $1 - 0,03 = 0,97$.

Voor de werking van het systeem als geheel moet dit groepje werken èn moet A werken. Met de speciale productregel wordt de kans hierop bepaald: $0,97 \times (1 - 0,017) = 0,97 \times 0,983 = 0,95351$. De kans dat het systeem faalt, is dus $1 - 0,95351 = 0,04649$.

Varianten op het bovenstaande voorbeeld verkrijgt men niet alleen door bijvoorbeeld de blokjes A, B en C te vervangen door samengestelde systemen, maar ook door eisen als dat van drie parallel geschakelde componenten er twee van de drie moeten werken om het systeem aan de praat te houden.

<u>*Opgaven*</u>

1.61 Als A, B en C parallel geschakeld zijn met betrouwbaarheden p_A, p_B, p_C, bepaal dan de betrouwbaarheid van het systeem als
- a ten minste één component moet functioneren.
- b ten minste twee componenten moeten functioneren.

1.62 Een systeem bestaat uit twee in serie geschakelde subsystemen, die elk uit twee componenten bestaan: A en B parallel, resp. C en D parallel. Bepaal de betrouwbaarheid van het hele systeem als A en B functioneren met kans p_A, en C en D met kans p_C.

1.7 Beknopte combinatoriek

Bij het berekenen van kansen wordt vaak gebruik gemaakt van 'aantallen mogelijkheden'. Een kans wordt nogal eens bepaald door het op elkaar delen van twee van zulke aantallen. In de kansdefinitie van Laplace kwamen we al het quotiënt van twee aantallen tegen.

Het product-principe

Stel dat bij een proces, bv. 's morgens aankleden, er achtereenvolgens twee keuze-momenten zijn, bij het eerste keuzemoment n_A mogelijkheden (voor het overhemd) en daarna n_B (voor de broek), en dat bovendien elke keuze op het tweede moment kan worden gemaakt ongeacht de keuze op het eerste moment (alles kan met alles worden gecombineerd). Dan is het totale aantal mogelijkheden (voor kleding) $n_A \times n_B$.

Uiteraard kan dit principe tot meer stappen worden uitgebreid.

> <u>*Voorbeeld* 1.5</u>
> Als men k keer kan kiezen uit telkens n mogelijkheden zijn er n^k mogelijkheden voor het eindresultaat. Er zijn bijvoorbeeld 10^5 getallen van vijf cijfers, een triviale constatering die nu ook gemakkelijk is in te zien als men de nullen aan de linkerkant even laat staan. Elk van de getallen kan worden gevonden door achtereenvolgens vijf cijfers uit de verzameling {0, 1, 2, …, 9} te kiezen (trekkingen met teruglegging).

Ook in gevallen waarin wel de mogelijkheden zelf, *maar niet hun aantal*, in de tweede stap van het keuzeproces varieert, kan deze regel worden toegepast.

> <u>*Voorbeeld* 1.6</u>
> Een potje bevat 10 genummerde balletjes: 0, 1, 2, . . . , 9. Na het kiezen of trekken van de eerste bal, die daarna **niet** wordt teruggelegd, ligt niet vast welke ballen er voor een tweede trekking overblijven, maar wel dat het nog negen zijn. Stel dat er in totaal drie ballen zonder teruglegging worden getrokken, dan zijn er voor het eindresultaat (het getrokken rijtje van drie cijfers) $10\times9\times8 = 720$ mogelijkheden.
> Bedenk daarbij dat het rijtje 5, 8, 1 verschilt van 1, 8, 5. Als we niet op de volgorde zouden letten, is het aantal mogelijke 'groepjes van drie cijfers' (zonder volgorde) zes maal zo klein als het aantal rijtjes van drie cijfers. De factor 6 is precies het aantal volgorden waarin een groepje van drie in een bepaalde volgorde kan worden gelegd.
>
> <u>*Voorbeeld* 1.7</u>
> Stel nu eens dat alle balletjes achter elkaar uit de pot worden getrokken. Het aantal mogelijkheden voor het rijtje dat dan ontstaat is $10\times9\times8\times \ldots \times2\times1 = 3628800$. Het product van de gehele getallen 1 t/m n wordt met $n!$ (n faculteit) aangegeven; het aantal mogelijke rijtjes bedraagt dus 10! (tien-faculteit) = 3628800.

n-faculteit

Voor alle niet-negatieve getallen n is $n!$ gedefinieerd:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n \qquad \text{voor } n \geq 1$$

$$0! = 1 \qquad \text{per definitie voor } n = 0$$

$n!$ is een functie van n, en wel een heel snel stijgende functie. Het getal $69! = 1.7112245\times10^{98}$ is al de grootste faculteit die op een eenvoudige zakrekenmachine kan worden berekend, of liever gezegd, op de display kan worden getoond. Bij 70! zou de exponent van 10 boven 99 uitkomen. Voor $\times10^{100}$ is geen plaats. Aangezien de rekenmachientjes de 'mantisse' (hierboven 1.71122..) met slechts één decimaal voor de komma willen vermelden, past 70! niet binnen de voorgeprogrammeerde mogelijkheden.

$n!$ is het **aantal mogelijke volgorden** waarin n verschillende objecten kunnen worden gerangschikt. Als n niet te groot is, kan men al die volgorden uitschrijven, bijvoorbeeld voor $n = 3$:

a, b, c   a, c, b   b, c, a   b, a, c   c, a, b   c, b, a

Er zijn drie mogelijke eerste letters, daarna zijn er twee mogelijkheden voor de tweede letter en vervolgens ligt vast wat de derde letter in het rijtje is. En net zo ziet men dat er bij n verschillende objecten (letters) er n mogelijkheden zijn voor de eerste keus, $n-1$ voor de tweede, $n-2$ voor de derde, enzovoort.
Het aantal mogelijke volgorden van n onderscheidbare elementen wordt ook wel het aantal *permutaties* genoemd.

<u>*Voorbeeld* 1.6 *(vervolg)*</u>

Stel dat we drie getallen uit 1, 2, . . . , 10 trekken, maar niet in de volgorde van de getrokken getallen zijn geïnteresseerd. Elk getrokken drietal zou in 3! = 6 verschillende volgorden kunnen worden gelegd. Dus het hierboven genoemde aantal mogelijkheden van 10×9×8 = 720 (het aantal mogelijke getrokken *rijtjes* van drie getallen) moet door 3! = 6 worden gedeeld om het aantal mogelijke deelverzamelingen (waarin de volgorde geen rol speelt) te verkrijgen. Er zijn dus $\dfrac{10\times9\times8}{3!}=\dfrac{720}{6}=120$ mogelijke deelverzamelingen van drie getallen uit tien getallen. Anders geschreven:

$$\frac{10\times9\times8}{3!}=\frac{10\times9\times8\ \times\ 7\times\ldots\times2\times1}{3!\ \times\ \ 7\times\ldots\times2\times1}=\frac{10!}{3!\times7!}$$

Dit aantal wordt ook wel aangegeven met de notatie

$$\binom{10}{3}\quad\text{of als}\quad C_3^{10};\ \text{ wat dus hetzelfde is als}\quad\binom{10}{7}\quad\text{of als}\quad C_7^{10}$$

Er zijn dus evenveel deelverzamelingen van 3 elementen uit 10, als er deelverzamelingen zijn van 7 elementen uit 10. Nogal wiedes: elke getrokken deelverzameling van drie legt het restant van zeven elementen vast.

Combinaties

Voor elk niet-negatief geheel getal n en elk niet-negatief getal $k \le n$ is het **aantal mogelijke verschillende combinaties** (= **deelverzamelingen**, zonder volgorde) van k uit een verzameling van n verschillende elementen gelijk aan:

$$\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-k+1)}{k!}=$$

$$=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-k+1)\quad\times(n-k)!}{k!\times(n-k)!}=\frac{n!}{k!\times(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

Zo'n getal heet een *binomiaalcoëfficiënt*. Deze worden uitgesproken als: *n* boven *k*

$$\binom{n}{k}\quad\text{wordt ook wel geschreven als}\quad C_k^n$$

Zakrekenmachines hebben vaak een toets $\boxed{n\,\mathbf{C}\,r}$ voor het berekenen van zulke binomiaalcoëfficiënten (soms moet je eerst de shift-toets indrukken). Bijvoorbeeld:

$\boxed{1}\ \boxed{0}\ \ \boxed{n\,\mathbf{C}\,r}\ \ \boxed{3}\ \ \boxed{=}$

zal het resultaat 120 geven. Hoe geavanceerder de rekenmachine, hoe groter de kans dat het ingewikkelder gaat, bijv. met menu's.

<u>*Opgaven*</u>

1.71 De cijfers 1, 2, 3, . . . , 9 worden in willekeurige volgorde achter elkaar gezet, waardoor een getal van negen cijfers ontstaat. Bereken de kans
- a dat dit getal even is.
- b dat dit getal deelbaar is door 5.
- c dat de 4 en de 6 naast elkaar staan.

1.72 Uit een groep van 40 mannen en 16 vrouwen wordt willekeurig een subgroep van acht personen getrokken. Bereken de kans dat deze groep louter uit mannen bestaat.

1.73 Bij een bepaald spel moeten een speler tien verschillende getallen uit {1, 2, . . . , 80} kiezen. Het casino trekt dan 20 verschillende getallen uit de 80 beschikbare. Bereken de kans op precies vijf goed.

1.74 Op hoeveel zichtbaar verschillende manieren kunnen de negen letters van het woord *repetitie* worden gerangschikt?

1.75 Een pot bevat acht rode en vijf gele knikkers. Daaruit worden er aselect drie getrokken.
- a1 Bepaal de kans dat er geen gele bij zijn, als zonder teruglegging wordt getrokken.
- a2 Idem in het geval met teruglegging.
- b Zelfde vragen als bij a, maar dan bij een pot met 24 rode en 15 gele knikkers.
- c Wat gebeurt er als het aantal knikkers in de pot wordt verhoogd bij gelijkblijvende verhouding tussen aantal rode en gele?

1.76
- a Neem zonder teruglegging een willekeurig drietal leerlingen uit een klas van 20. Trek uit de volledige klas nog eens zo’n drietal. Bereken de kans dat de beide drietallen ten minste één leerling gemeen hebben.
- b Trek tweemaal een bridgehand (13 kaarten) uit een compleet spel van 52. Bereken de kans dat de beide handen ten minste één kaart gemeen hebben.

1.77 Van 18 studenten hebben er zes niveau A, vier niveau B, de overigen niveau C. Op hoeveel manieren zouden deze 18 letters over de 18 studenten kunnen worden verdeeld?

1.78 Bereken de kans dat een willekeurig getrokken bridgehand (13 kaarten uit een spel van 52)
- a geen hartens bevat.
- b precies twee azen bevat.

1.79 Een vijvertje bevat 50 vissen, waarvan er 10 zijn gemerkt. Men vangt willekeurig zeven vissen. Bereken de kans dat hierbij precies twee gemerkte vissen zijn.

1.80 N mensen, waaronder A en B, worden op een rij gezet. Bereken de kans dat A *niet* naast B komt. (Vergl. opg. 1.71c.)

Stelling 1.8

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Bewijs
Beide gelijkheden zijn door uitschrijven eenvoudig te verifiëren. ♦

<table>
<tr>
<td>Opmerking
De gelijkheden uit stelling 1.8
zijn in de
driehoek van Pascal
te herkennen.</td>
<td>1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1</td>
</tr>
</table>

Stelling 1.9 ***(Binomium van Newton)***
Binomiaalcoëfficiënten treden op in het *binomium van Newton*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Voorbeeld 1.8

$$(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^k b^{4-k} = \binom{4}{0} b^4 + \binom{4}{1} ab^3 + \binom{4}{2} a^2b^2 + \binom{4}{3} a^3 b + \binom{4}{4} a^4 =$$

$$= 1 \times b^4 + 4 \times ab^3 + 6 \times a^2b^2 + 4 \times a^3b^1 + 1 \times a^4 \text{ (zie driehoek van Pascal)}$$

Stelling 1.10

$$2^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \quad = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$$

Bewijs
De gelijkheid wordt gevonden door $a = b = 1$ te nemen in de binomiale formule (st. 1.9).

We kunnen de relatie tussen 2^n en het rechterlid ook beredeneren. Het aantal mogelijke deelverzamelingen van een verzameling van n elementen is 2^n. Elk van de n elementen heeft twee mogelijkheden: wel of niet in de deelverzameling (de lege verzameling en de verzameling zelf tellen hierbij mee). Het totale aantal mogelijke deelverzamelingen is ook op een andere manier te tellen: het aantal deelverzamelingen met 0 elementen, met 1 element, met 2 elementen, ..., samen. Op die manier krijgen we het rechterlid, want er zijn $\binom{n}{k}$ deelverzamelingen met k elementen.

Dit geldt ook voor de lege ($k = 0$, eerste term) en de hele verzameling ($k = n$, laatste term). ♦

Samenvatting

- Als een element wordt getrokken uit een verzameling A van n_A onderscheiden objecten, en een ander element wordt getrokken uit een verzameling B van n_B onderscheiden objecten, zijn er $n_A \times n_B$ mogelijke trekkingsresultaten.
- n^k is het aantal manieren waarop k objecten met teruglegging uit een verzameling van n verschillende objecten kan worden getrokken met inachtneming van de volgorde.
- $n! = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(2)\,(1)$ is het aantal mogelijke manieren om n onderscheidbare objecten in een volgorde te leggen.
- $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ is het aantal mogelijke manieren om een deelverzameling van k objecten uit een verzameling van n verschillende objecten te trekken ongeacht de volgorde waarin dat gebeurt.

Fibonacci

We vinden de binomiaalcoëfficiënten op een niet-triviale manier terug bij de opbouw van de rij van Fibonacci. Deze rij is gedefinieerd door

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$, en vervolgens met de recursie $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ voor $k \geq 3$

Dit levert de volgende rij op:

1 1 2 3 5 8 13 21

We richten ons nu op de volgende vraag.

> *Hoeveel mogelijke rijtjes (ter lengte n) zijn er die uitsluitend uit nullen en enen bestaan, waarbij als voorwaarde wordt gesteld, dat zich niet twee nullen naast elkaar mogen bevinden?*

Laten we dit aantal aangeven met b_n. Makkelijk is in te zien: $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, en zoals hieronder uitgeschreven $b_3 = 5$:

0 1 0
0 1 1
1 0 1
1 1 0
1 1 1

Van de 2^3 mogelijke rijtjes vallen er dus drie af omdat ze niet aan de voorwaarde voldoen.

Bij lengte $n = 4$ zijn er weliswaar $2^4 = 16$ rijtjes, maar daarvan voldoen er een heleboel niet aan de gestelde eis. Zijn er alleen enen (één mogelijkheid), of is er maar één 0 bij (vier mogelijkheden), dan is er geen probleem. Zijn er meer dan twee nullen (meer dan de helft), dan staan er zeker twee naast elkaar. Van de rijtjes met twee nullen en twee énen moet dus worden nagegaan, welke er aan de voorwaarden voldoen. Laten we ons voorstellen dat we een rijtje van twee énen hebben, en dat de - losse - nullen er nog tussen moeten. Daarvoor zijn drie plaatsen beschikbaar: links van de linkse 1, ertussenin, rechts van de rechtse 1. De twee nullen kunnen op 3 boven 2 manieren (= 3 manieren) over deze beschikbare plaatsen worden verdeeld. Als er h énen naast elkaar staan, zijn er $h + 1$ posities om een losse 0 te plaatsen. Het aantal nullen k kan dus nooit meer zijn dan $h + 1$ zonder dat er nullen naast elkaar komen.

In het algemeen geldt dus $h + k = n$ (h énen en k nullen, samen n), en $k \le h + 1$.

Hieruit volgt $2k \le n + 1$, oftewel: $k \le \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$

Hierin geven de rechte haken de Entier-functie aan, waarmee een reëel getal naar beneden op een geheel getal wordt afgerond.

Opgave

1.82 Leid een formule af waarin a_n gelijk is aan een som van binomiaalcoëfficiënten.

Enkele antwoorden / uitwerkingen

1.10 Elk van de mogelijke uitkomsten zou vijf keer 'moeten' optreden. De gevonden frequentie blijken hiervan nog behoorlijk af te wijken. Dit brengt met zich mee dat ook de uitkomsten van verschillende studenten, die alle hetzelfde experiment hebben gedaan, flink zullen verschillen. De frequenties variëren ruwweg van 0 tot 10, de relatieve frequenties dus van 0 tot 1/3 (i.p.v. 1/6).

1.11 Nee, we kunnen het experiment uit 1.10 wel uitbreiden tot 60 000 worpen, maar ook dan zullen de relatieve frequenties niet precies gelijk zijn aan 1/6. Als de verschillen te groot zijn, komt men wèl tot de conclusie dat de dobbelsteen vals is, maar de conclusie dat de dobbelsteen zuiver is, kan nooit worden getrokken.

1.21 a A en B; B en C(12); D en C(10); D en C(11); D en C(12); B en E;

b C(12) is deel van A; E is deel van A;

c Door tellen van de aantallen mogelijkheden vindt men:
P(A) = ½; P(B) = ½; P(C(9)) = 10/36; P(C(10)) = 6/36; P(C(11)) = 3/36; P(C(11)) = 1/36;

d Kan zijn 16, 25, 36, 64. Kans is dus 4/36.

1.74 Negen mogelijkheden voor de plaats van de *r* waarvan er maar één is, daarna acht mogelijkheden voor de plaats van de *p*, dan 7 boven 2 mogelijkheden voor de plaatsing van de beide i's, dan nog 5 boven 2 voor de plaatsing van de beide t's. Voor de e's blijven dan nog drie plaatsen over; er valt niets meer te kiezen. Het aantal mogelijke plaatsingen is dus: $9\times 8\times\binom{7}{2}\times\binom{5}{2}\times\binom{3}{3} = 15120$

1.78 Er zijn $\binom{52}{13}$ mogelijke bridgehanden.

a Voor een hand zonder hartens heeft men keus uit 39 kaarten. Daarvoor zijn dus $\binom{39}{13}$ mogelijkheden.

De kans op nul hartens is dus $\binom{39}{13}/\binom{52}{13} = 0{,}0128$

b Twee azen moeten uit de vier beschikbare azen komen: 4 boven 2, dus 6 mogelijkheden. Uit de andere 48 kaarten moeten mijn elf andere kaarten komen: $\binom{48}{11}$. De kans op twee azen is dus

$\binom{4}{2}\binom{48}{11}/\binom{52}{13} = 0{,}2135$